

今日の課題（解答）

[A.1] 座標平面 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への線形写像について、以下の問いに答えよ。

(a) この線形写像が、原点を中心として反時計回りに $\frac{4}{3}\pi$ ラジアン回転のとき、その行列は何か？

$$\text{(解)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) この線形写像が、原点を中心として時計回りに $\frac{1}{4}\pi$ ラジアン回転のとき、その行列は何か？

$$\text{(解)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c) この線形写像が、原点を通る直線 $y = 3x$ に関する鏡映のとき、その行列は何か？

$$\text{(解)} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

[A.2] 座標空間 \mathbb{R}^3 で、原点に関する点対称を与える行列を求めよ。

$$\text{(解)} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ の原点に関する対称点は } -\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \text{ であるから、求}$$

$$\text{める行列は } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

[A.3] 次の行列で定まる線形写像について、以下の問いに答えよ。

$$(i) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (iv) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (v) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (i) から (v) のそれぞれの場合に、教科書 p.19 の判定法に従って像の次元を求めよ。

(解) 教科書 p.19 の（一番下の段落の）判定法を用いる。(i) 第 1 列は第 2 列の 0 倍であるから、像の次元は 1. (ii) 第 2 列は第 1 列の 0 倍であるから、像の次元は 1. (iii) 第 1 列と第 2 列はもう一方のスカラー倍にはならない。実際、第 1 成分を比べると第 1 列は第 2 列の 2 倍でなければならないが、2 倍では第 2 成分が合わない。よって、像の次元は 2. (iv) 第 1 列は第 2 列の 1 倍だから、像の次元は 1. (v) 第 1 列と第 2 列はもう一方のスカラー倍にはならない。実際、第 1 列のスカラー倍の第 1 成分は必ず 0 であるが、第 2 列の第 1 成分は 0 ではない。よって、像の次元は 2.

(b) (iii), (iv), (v) の場合に、平面の像、直線 $y = 2x$ の像を求めよ。

(解) 像の次元が 2 の場合は、平面の像は平面全体（教科書 p.19 の上から 8 行目）だから、(iii), (v) のとき、平面の像は平面全体。(iv) のとき、像の次元が 1 だということは、平面全体の像は原点を通る直線だということである（教科書 p.19 の上から 9 行目）。この直線を決定するために、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の像を計算すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ -2(u+v) \end{pmatrix} = (u+v) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる。 u, v がどのような実数であっても、この点は直線 $y = -2x$ 上にある。よって、像は、直線 $y = -2x$ 。

直線 $y = 2x$ の像を求めるには、直線上の点 $\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$ に、(iii), (iv), (v) の各行列をかけて得られる点がどのような図形の上にあるかを調べればよい。実際に計算してみると、(iii) 直線 $y = \frac{1}{5}x$ 、(iv) 直線 $y = -2x$ 、(v) 直線 $y = x$ となる。

- [A.4] (a) 座標平面 \mathbb{R}^2 の 4 点 $(1, 2), (5, 3), (2, 6), (6, 7)$ を頂点とする平行四辺形の面積を、行列式を用いて計算せよ。

(解) $(5, 3) - (1, 2) = (4, 1)$ と $(2, 6) - (1, 2) = (1, 4)$ を並べた行列式 (の絶対値) であるから、
 $\left| \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right| = 15$. (教科書 p.21 の一番下の囲みを見よ。)

- (b) 座標平面 \mathbb{R}^2 の点 $A(5, 2), B(-2, 6), C(0, 1)$ について、ベクトル $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ のなす角は鋭角であるか鈍角であるかを、(図ではなく) ベクトルの内積の計算で判定せよ。

(解) $\overrightarrow{CA} = (5, 2) - (0, 1) = (5, 1)$ と $\overrightarrow{CB} = (-2, 6) - (0, 1) = (-2, 5)$ との内積を計算すると、
 $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -5$ である。よって、この 2 つのベクトルのなす角を θ とすると $\cos \theta < 0$ だから、この角は鈍角である。($\cos \theta > 0$ のとき、 θ は鋭角、 $\cos \theta < 0$ のとき、 θ は鈍角である。)

- (c) 座標平面 \mathbb{R}^2 の点 $D(-1, -4), E(-4, -1)$ について、ベクトル \overrightarrow{OD} からベクトル \overrightarrow{OE} に回る向きは時計回りであるか反時計回りであるかを、(図ではなく) 行列式の計算で判定せよ。

(解) $\det \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = -15 < 0$ だから、時計回りである。(教科書 p.21 の一番下の囲みを見よ。)

- [A.5] 3 点 $(0, 0, 0), (2, 1, 1), (0, 3, -1)$ を通る平面について、

- (a) この平面の法線ベクトルを上の外積の公式 (#) を用いて計算せよ。

(解) 平面上にあるベクトル $(2, 1, 1), (0, 3, -1)$ の外積は、この両方のベクトルに直交するから、平面の法線を与える。実際に外積を公式にしたがって計算すると、 $(-4, 2, 6)$ 。

- (b) その方程式を求めよ。

(解) 原点を通る平面の方程式は、 $ax + by + cz = 0$ の形で、 (a, b, c) は平面の法線ベクトルである。したがって、(a) の結果より、方程式は $-4x + 2y + 6z = 0$ 。簡単にすると、 $2x - y - 3z = 0$ 。

- (c) 点 $(1, -1, -1)$ とこの平面の間の距離を求めよ。

(解) 点 $(1, -1, -1)$ を通るこの平面の法線は $\mathbf{x} = (2, -1, -3)t + (1, -1, -1) = (2t + 1, -t - 1, -3t - 1)$ とパラメータ表示される。この法線と平面との交点は $(\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ 。よって、求める距離は $\sqrt{(-6/7)^2 + (3/7)^2 + (9/7)^2} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$ 。(No.1 の解答プリントの最後に記した公式を用いても計算できる。)

- [B.1] 座標空間 \mathbb{R}^3 で、原点を通り、法線ベクトル $\mathbf{n} = (\ell, m, n)$ を持つ平面に関する面対称 (これも鏡映といわれる) を与える行列を求めよ。

(略解) 点 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ のこの平面に関する面対称の位置にある点 \mathbf{X} は $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \frac{2(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n}$ (この公式を証明してみよ。講義で平面上の直線に関する鏡映について説明したが、その方法でできる)。こ

れを計算すると、

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\frac{l^2 + m^2 + n^2}{l^2 + m^2 + n^2}x - \frac{2lm}{l^2 + m^2 + n^2}y - \frac{2ln}{l^2 + m^2 + n^2}z, \\ -\frac{2lm}{l^2 + m^2 + n^2}x + \frac{l^2 - m^2 + n^2}{l^2 + m^2 + n^2}y - \frac{2mn}{l^2 + m^2 + n^2}z, \\ -\frac{2ln}{l^2 + m^2 + n^2}x - \frac{2mn}{l^2 + m^2 + n^2}y + \frac{l^2 + m^2 - n^2}{l^2 + m^2 + n^2}z \end{pmatrix}.$$

したがって、求める行列は、次で与えられる。

$$\begin{pmatrix} -\frac{l^2 + m^2 + n^2}{l^2 + m^2 + n^2} & -\frac{2lm}{l^2 + m^2 + n^2} & -\frac{2ln}{l^2 + m^2 + n^2} \\ \frac{2lm}{l^2 + m^2 + n^2} & \frac{l^2 - m^2 + n^2}{l^2 + m^2 + n^2} & -\frac{2mn}{l^2 + m^2 + n^2} \\ -\frac{2ln}{l^2 + m^2 + n^2} & -\frac{2mn}{l^2 + m^2 + n^2} & \frac{l^2 + m^2 - n^2}{l^2 + m^2 + n^2} \end{pmatrix}.$$

[B.2] 写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が

$$(1) (f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3)$$

を満たすならば、

$$(a) f(\lambda \mathbf{a}) = \lambda f(\mathbf{a}) \quad (\lambda \text{ はスカラー、} \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3)$$

$$(b) f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3)$$

が成り立つことを証明せよ。(性質 (a), (b) が成り立つとき、写像 f は線形写像といわれ、ある行列 A があって、 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表わされる。)

(方針) ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} について、 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ を示すには、 $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$ を証明すればよい。すなわち、 $(f(\lambda \mathbf{a}) - \lambda f(\mathbf{a}), f(\lambda \mathbf{a}) - \lambda f(\mathbf{a})) = 0$, $(f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}), f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})) = 0$ を (#) を用いて証明すればよい。

[B.3] 上の外積の公式 (#) について以下の問いに答えよ。

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} と直交することを示せ。

(方針) $(\mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}), (\mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ をきちんと計算すれば、0 となることが分かる。

(b) \mathbf{a}, \mathbf{b} を隣り合う 2 辺とする平行 4 辺形の面積の 2 乗を内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{a}), (\mathbf{b}, \mathbf{b}), (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を用いて表わせ。

(解) \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を θ とすると、平行 4 辺形の面積は、 $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ である。よって、平行 4 辺形の面積² $= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \cos^2 \theta = (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$ である。

(c) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$ が \mathbf{a}, \mathbf{b} を隣り合う 2 辺とする平行 4 辺形の面積に等しいことを示せ。

(方針) (b) により $(\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$ を計算で示せばよい。